２０２１年度岡山大学理学部第３年次編入学
試験問題（一般入試）

専　門　科　目

数　学

（数　学　科）

注意事項

1　問題冊子は１冊，解答用紙は４枚，下書き用紙は５枚です。

2　すべての解答用紙に受験番号を記入してください。

3　各問題の解答は，それぞれ指定された解答用紙に記入してください。

4　解答用紙のホッチキスは，外さないでください。

5　試験終了後，問題冊子と下書き用紙は必ず持ち帰ってください。

2021年度岡山大学理学部第3年次編入学　試験問題（一般入試）

【数学科】

【試験科目：専門科目（数学)】

解答は問題と同じ番号の解答用紙に記入せよ。

1 $0<a<b$を定数とする。以下の問いに答えよ。

(1) $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon}\frac{\cos x}{x}\,dx=\log\frac{b}{a}$ を示せ。

(2) $\displaystyle\lim_{r\to\infty}\int_{ar}^{br}\frac{\cos x}{x}\,dx=0$ を示せ。

(3) 広義積分

$$\int_0^\infty\frac{\cos(ax)-\cos(bx)}{x}\,dx$$

を求めよ。

2 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$，$\{c_n\}$を実数列とするとき，以下の問いに答えよ。

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(a_{n+1}-a_n)$が収束することが，極限$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$が存在するための必要十分条件であることを示せ。

(2) すべての自然数nに対して，

$$\sum_{k=1}^{n}a_kb_k=-\sum_{k=1}^{n}\left\{(a_{k+1}-a_k)\sum_{m=1}^{k}b_m\right\}+a_{n+1}\sum_{k=1}^{n}b_k$$

が成り立つことを示せ。

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(a_{n+1}-a_n)$が絶対収束して$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}b_n$が収束するとき，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$は収束することを示せ。

(4) $|x|<1$となる実数xを固定する。このとき，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}c_nx^n$が収束することが，

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_nx^n}{1-x^n}$$

が収束するための必要十分条件であることを示せ。

3 nを自然数とする。$(n+1)$次正方行列

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ a_1 & 0 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ a_1 & a_2 & 0 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & 0 & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n & 0 \end{pmatrix}$$

について，以下の問いに答えよ。

(1) $n=2$で$a_1=a_2$のとき，Aは対角化可能かどうか述べよ。対角化可能であるとき，$P^{-1}AP$が対角行列となるような正則行列Pを一つ求めよ。

(2) Aの固有値を求めよ。

(3) $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n \geq 0$とする。このとき，$A$の階数（ランク）を求めよ。

4 3次正方行列Aについて$A^{100}=O$であるとき，以下の問いに答えよ。ただし，Oは零行列とする。

(1) Aが対角化できるとき，$A=O$であることを示せ。

(2) Aが対角化できないとき，$A^3=O$であることを示せ。